

Jacques BLUM

Université de Nice Sophia Antipolis

jblum@unice.fr

Didier AUROUX

Université de Toulouse

auroux@math.univ-toulouse.fr

---

Une machine à remonter le temps :  
*Le Back and Forth Nudging*

---

Projet LEFE/ASSIM 2006

# Motivations

---

**Motivation** : identifier la condition initiale dans un système géophysique

Fondamental pour un système chaotique (Lorenz, atmosphère, océan, ...)

**Difficulté** : Ces systèmes sont en général irréversibles.

**Comparaison avec le 4D-VAR** : méthode de contrôle optimal minimisant l'écart quadratique entre modèle et observations.

# Nudging direct

---

Considérons un modèle régi par un système d'EDP (ou EDO après discrétisation) :

$$\frac{dX}{dt} = F(X), \quad 0 < t < T,$$

avec une condition initiale  $X(0) = x_0$ .

$X_{obs}(t)$  : observations du système,  $H$  : opérateur d'observation

**Nudging direct :**

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X) + K(X_{obs} - H(X)), & 0 < t < T, \\ X(0) = x_0, \end{cases}$$

où  $K$  est la matrice de nudging (ou de gain).

Dans un cadre linéaire (où  $F$  est une matrice), le nudging direct s'apparente à l'observateur de [Luenberger](#) (ou observateur asymptotique).

# Nudging direct

---

- Météorologie : Hoke-Anthes (1976)
- Océanographie (modèle QG) : Verron-Holland (1989)
- Atmosphère (mésos-échelle) : Stauffer-Seaman (1990)
- Détermination optimale des coefficients de nudging :  
Zou-Navon-Le Dimet (1992)

# Nudging direct : cas linéaire

---

Observateur de Luenberger, ou observateur asymptotique :

[Luenberger, 1966]

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = FX + K(X_{obs} - HX), \\ \frac{d\hat{X}}{dt} = F\hat{X}, \quad X_{obs} = H\hat{X}. \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}(X - \hat{X}) = (F - KH)(X - \hat{X})$$

Si  $F - KH$  est une [matrice de Hurwitz](#), i.e. spectre strictement inclus dans le demi-plan  $\{\lambda \in \mathbb{C}; \text{Re}(\lambda) < 0\}$ , alors  $X \rightarrow \hat{X}$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

# BFN : Back and Forth Nudging algorithm

---

Algorithme du nudging direct et rétrograde

Back and Forth Nudging (BFN) : [Auroux-Blum, CRAS 2005]

Algorithme itératif (résolutions directes et rétrogrades) :

$$\tilde{X}_0(0) = \tilde{x}_0 \text{ (ébauche)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_k}{dt} = F(X_k) + K(X_{obs} - H(X_k)) \quad 0 < t < T \\ X_k(0) = \tilde{X}_{k-1}(0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{X}_k}{dt} = F(\tilde{X}_k) - K'(X_{obs} - H(\tilde{X}_k)) \quad T > t > 0 \\ \tilde{X}_k(T) = X_k(T) \end{array} \right.$$

Si  $X_k$  et  $\tilde{X}_k$  convergent vers la même limite  $X$ , et si  $K = K'$ , alors  $X$  vérifie l'équation d'état du modèle et coïncide avec les observations.

# Choix de la matrice directe $K$

---

Choix de la matrice  $K$  :

[Auroux-Blum, NPG 2008]

Discrétisation temporelle (avec un schéma implicite) de l'équation directe avec nudging :

$$\frac{X^{n+1} - X^n}{\Delta t} = F X^{n+1} + K(X_{obs} - H X^{n+1}).$$

On en déduit que le nudging direct est un compromis entre la minimisation de l'énergie du système et le carré de la distance aux observations :

$$\min_X \left[ \frac{1}{2} \langle X - X^n, X - X^n \rangle - \frac{\Delta t}{2} \langle F X, X \rangle + \frac{\Delta t}{2} \langle R^{-1} (X_{obs} - H X), X_{obs} - H X \rangle \right],$$

en choisissant par exemple

$$K = H^T R^{-1}$$

où  $R$  est la matrice de covariance des erreurs d'observation.

# Choix de la matrice rétrograde $K'$

---

## Choix de la matrice $K'$ :

Le terme de nudging rétrograde a un double rôle :

- **stabilisation** de l'intégration rétrograde du modèle (système irréversible)
- **feedback aux observations**

Si le système est observable, i.e.  $\text{rang}[H, HF, \dots, HF^{N-1}] = N$ , alors il existe une matrice  $K'$  telle que  $-F - K'H$  est une matrice de Hurwitz (méthode de placement de pôles).

En pratique,  $K' = k'H^T$  et  $k'$  peut être choisi comme la plus petite valeur rendant la résolution numérique rétrograde stable.



---

# RÉSULTATS NUMÉRIQUES ÉQUATION DE BURGERS

# Application à l'équation de Burgers

---

Équation de Burgers visqueux 1D :

[Auroux-Blum, NPG 2008]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial s} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0,$$

où  $u$  est la variable d'état,  $s$  représente la distance en mètres le long du parallèle 45°N et  $t$  est le temps.

La période du domaine est  $28.3 \times 10^6 m$ . Le coefficient de diffusion  $\nu$  est égal à  $10^5 m^2.s^{-1}$ . Le pas de temps est d'une heure, et la période d'assimilation est approximativement un mois (700 pas de temps).

**Données :** tous les 10 pas de temps (10 heures), tous les 5 points de grille, bruit blanc gaussien.

# Convergence

---

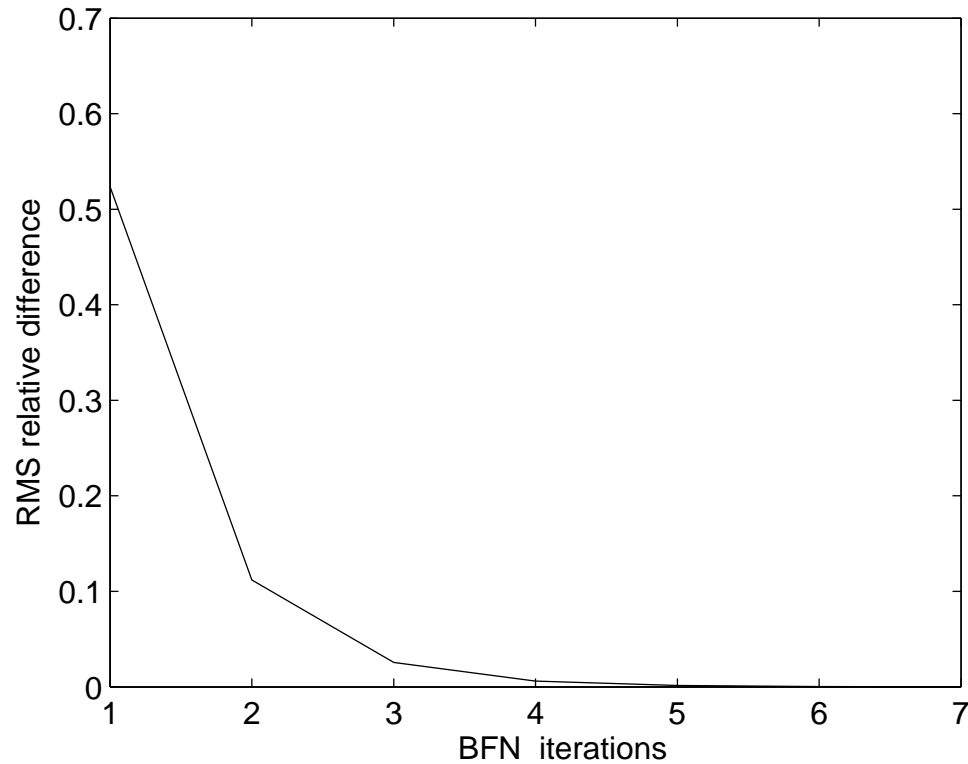


FIG. 1 – RMS relative difference between two consecutive iterates of the BFN algorithm versus the number of iterations.

# Convergence

---

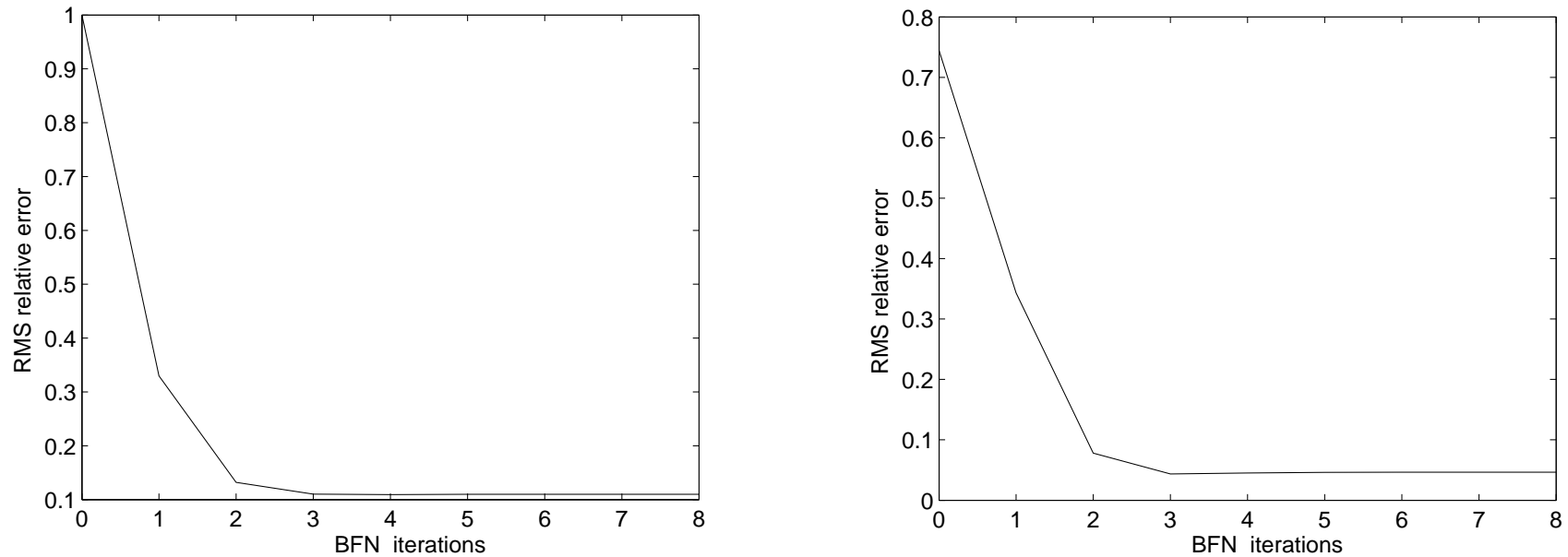


FIG. 2 – RMS relative difference between the BFN iterates and the exact solution versus the number of iterations, at time  $t = 0$  (a) and at time  $t = T$  (b).

# Comparaison avec le 4D-VAR

---

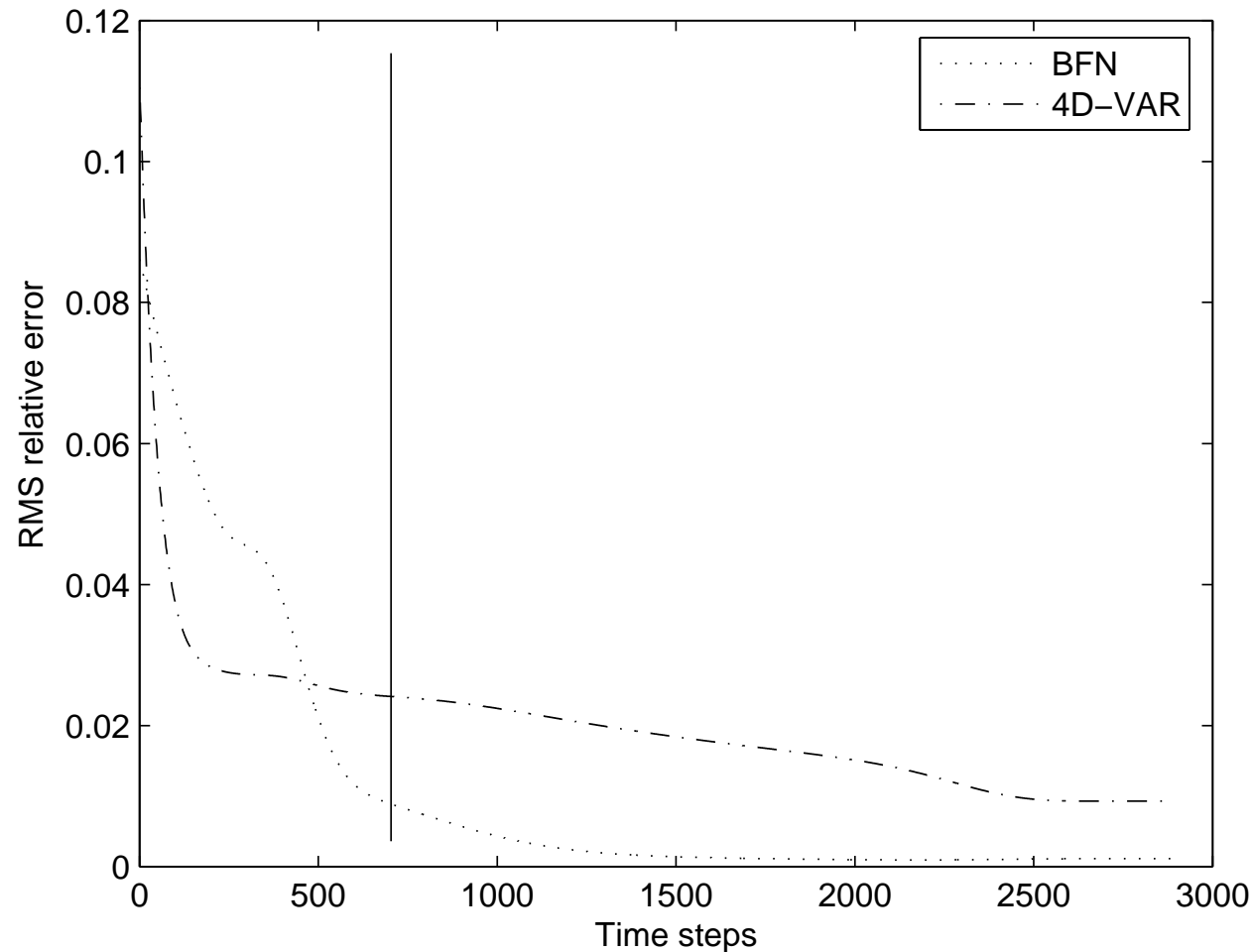


FIG. 3 – Evolution in time of the RMS difference between the reference trajectory and the identified trajectories for the BFN (dotted line) and the 4D-VAR (dash-dotted line) algorithms, in the case of perfect observations.

# Préconditionnement par le BFN

---

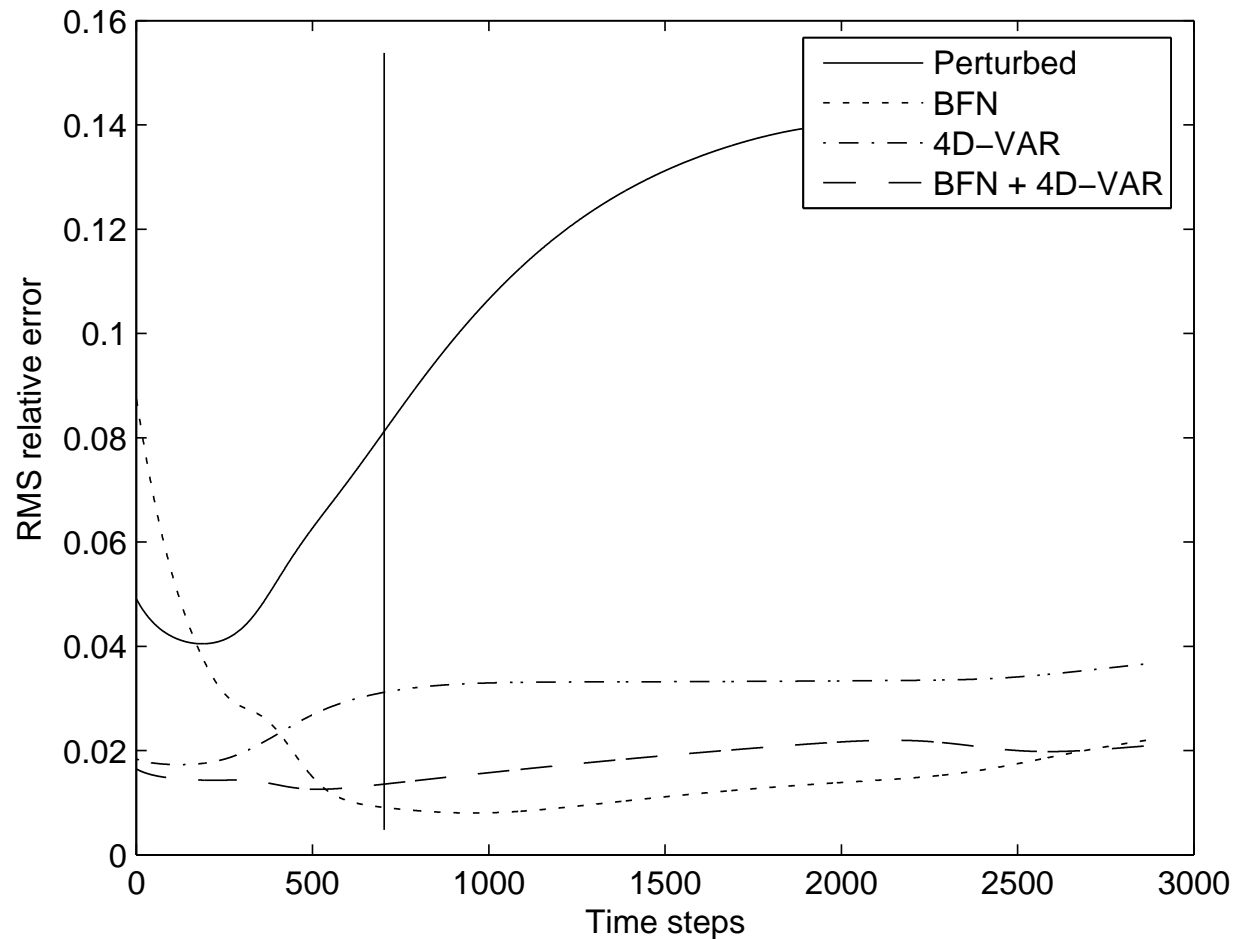


FIG. 4 — Evolution in time of the RMS difference between the reference trajectory and the identified trajectories for the BFN (dotted line), the 4D-VAR (dash-dotted line) and the BFN-preprocessed 4D-VAR (dashed line) algorithms, in the case of noised observations (with a 5% RMS error).

---

# RÉSULTATS NUMÉRIQUES

# MODÈLE SHALLOW-WATER

# Application à un modèle shallow-water

---

**Configuration numérique :**

[DA, IJNMF 2008]

**Domaine :**  $L = 2000 \text{ km} \times 2000 \text{ km}$ ; Frontières rigides et conditions de non glissement; Pas de temps = 1800 s; Période d'assimilation : 15 jours; Période de prévisions : 15 + 45 jours.

**Observations :** sur  $h$  seulement ( $\sim$  observations satellitaires), tous les 5 points de grille dans chaque direction, toutes les 24 heures.

**Ébauche (*initial guess*) :** état vrai du système un mois avant le début de la période d'assimilation + bruit blanc gaussien.

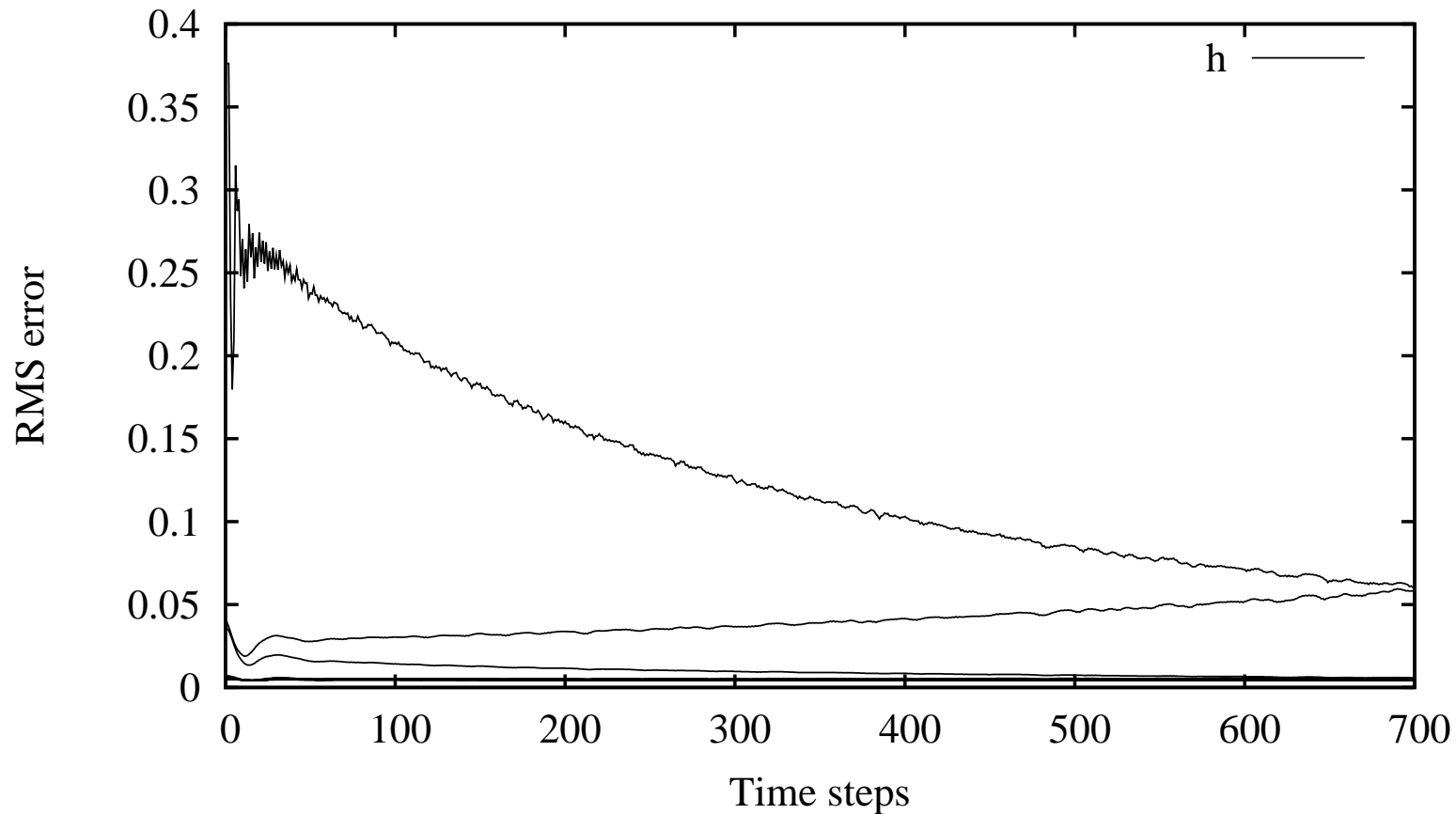
**Comparaison BFN - 4DVAR :** hauteur d'eau  $h$ ; vitesses  $u$  et  $v$ .



# Application à un modèle shallow-water

---

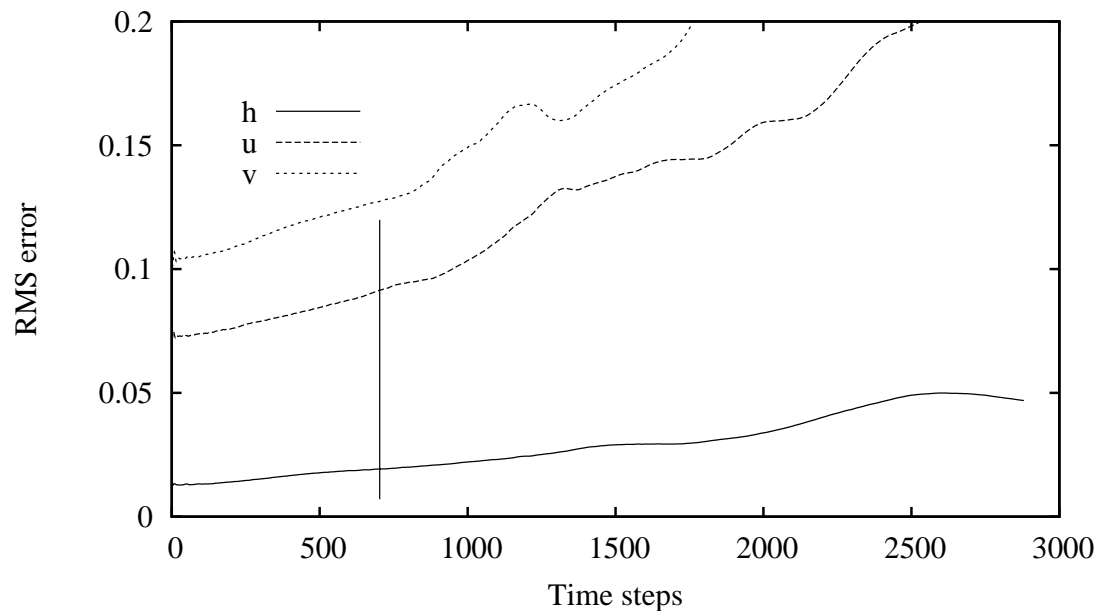
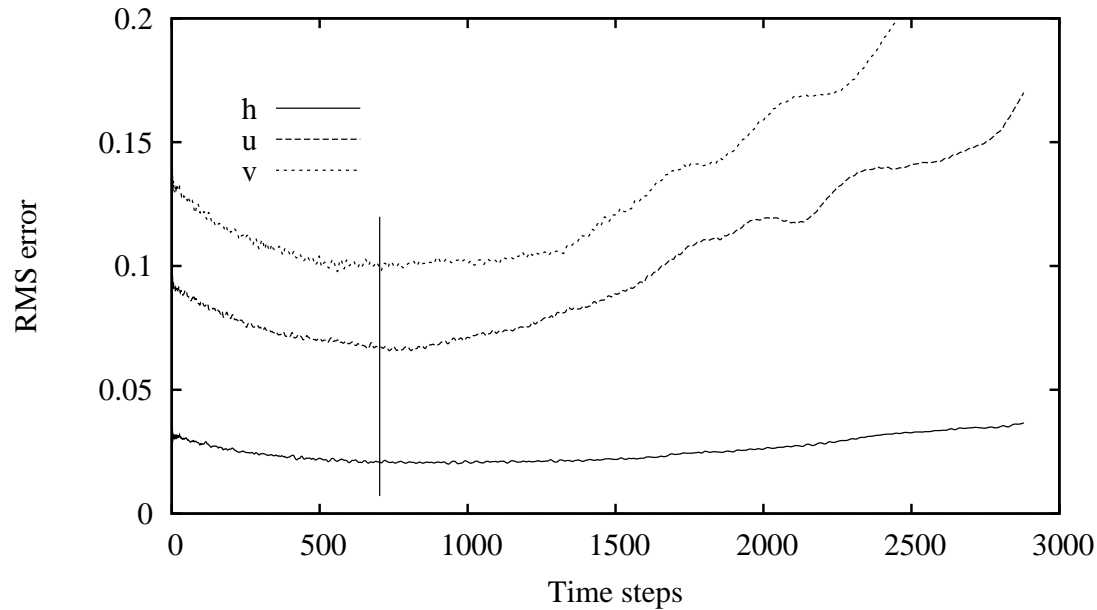
Convergence de l'algorithme :



Observations non bruitées.

Différence relative entre les itérés du BFN (5 premières itérations) et la solution exacte en fonction du temps, pour la hauteur d'eau  $h$ .

# Application à un modèle shallow-water

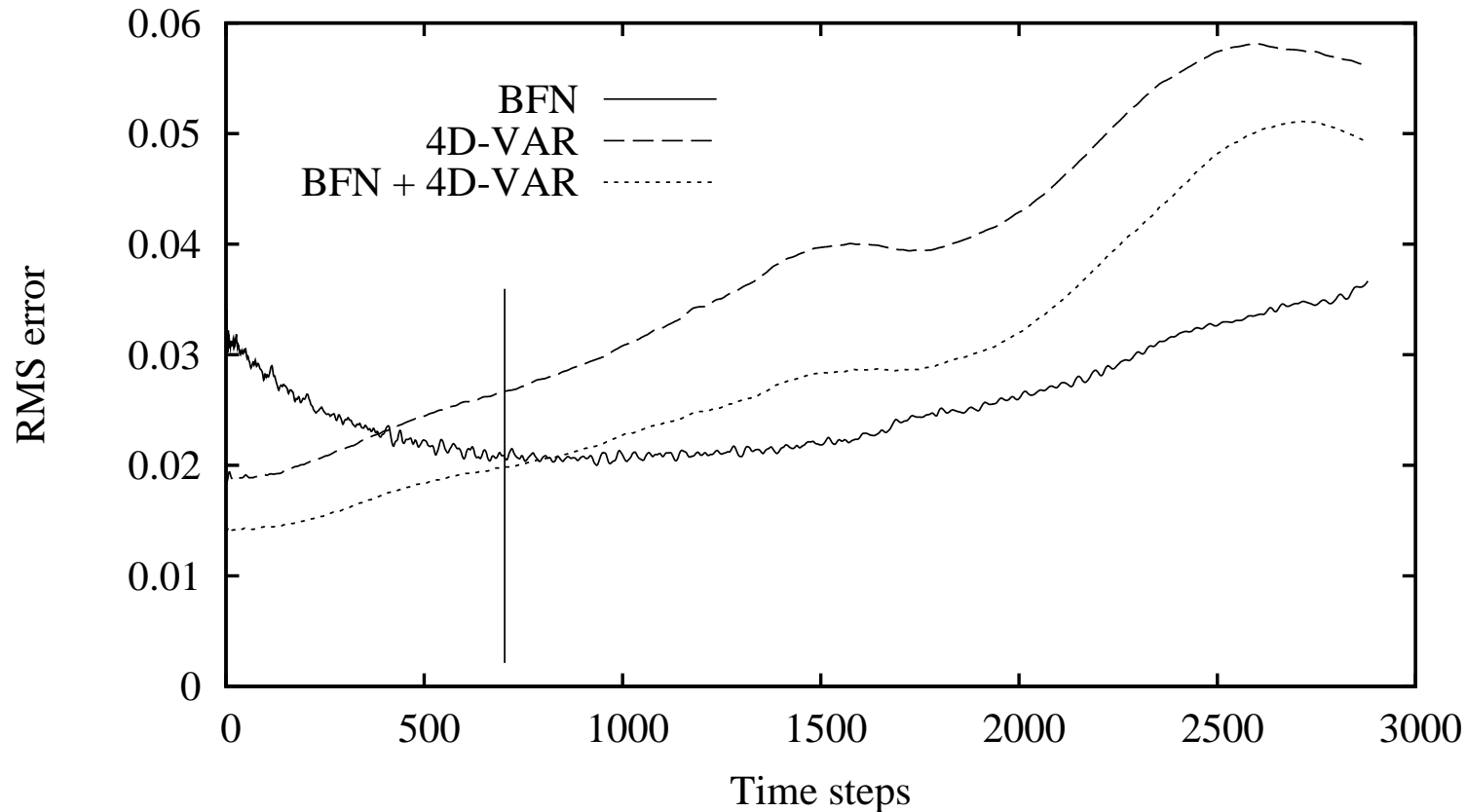


Qualité des prévisions à convergence :

Différence relative entre la solution exacte et la trajectoire prédite (identifiée) par le **BFN** (haut, 5 itérations) et le **4D-VAR** (bas, 16 itérations), dans le cas d'**observations bruitées**.

# Application à un modèle shallow-water

Hybridation avec le 4D-VAR : amélioration des prévisions.



Différence relative entre la solution exacte et les trajectoires prédites correspondant aux conditions initiales identifiées par le BFN ( $n_{iter} = 5$ ), le 4D-VAR ( $n_{iter} = 5$ ), et le **4D-VAR préconditionné par le BFN** ( $n_{iter} = 2 + 3$ ), dans le cas d'**observations bruitées**.

# Conclusions

---

## Conclusions :

- **Simplicité** de la mise en œuvre (pas de linéarisation, pas d'état adjoint, pas de minimisation, pas de matrices énormes à considérer)
- Très **efficace** dans les toutes **premières** itérations
- **Converge** beaucoup plus vite que le 4D-VAR
- **Coûts** de calcul et de mémoire **inférieurs** au 4D-VAR
- Le modèle est une **contrainte faible**
- Excellent **préconditionneur** pour le 4D-VAR (ou pour une autre méthode d'assimilation de données)

## Perspectives :

Tester l'algorithme sur un modèle aux équations primitives (modèle OPA), avec des observations réelles.